DETERMINAZIONE DEI VALORI FORMATIVI SPECIFICI DI ALCUNE AREE DISCIPLINARI COMUNI DEL BIENNIO SUPERIORE.

RISVOLTI APPLICATIVI NELLA PROGRAMMAZIONE E NELLA VALUTAZIONE E MODALITA' POSSIBILI DI AGGIORNAMENTO.

RAPPORTO FINALE I FASE DELLA RICERCA SVOLTA PER IL MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE
(Contratto 8 novembre 1989, rep. 1749)

Direttore della Ricerca:
Prof. EDDO RIGOTTI

Milano, novembre 1990

MATEMATICA

Carlo Felice Manara
Raffaella Manara Tardini

RIFLESSIONI SUL RUOLO DELL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA NEL PRIMO BIENNIO DELLE SCUOLE MEDIE SUPERIORI.

PARTE I. CONSIDERAZIONI GENERALI.

1 - Pensiamo che una riflessione sull'insegnamento della matematica possa utilmente partire dalla messa a fuoco del significato che essa ha nella cultura di oggi, e dalla ripresa di alcuni momenti della evoluzione storica del pensiero matematico.

Si potrebbe osservare che molto spesso la matematica viene considerata come una materia, per così dire, di servizio: ed il suo insegnamento viene considerato come una necessità inevitabile, a causa della importanza fondamentale che lo strumento matematico ha assunto nelle altre scienze; in particolare nella fisica, che quasi quotidianamente scuote l'opinione pubblica con scoperte che fanno rumore, ed ispira e dirige una tecnica che colpisce l'immaginazione delle masse con realizzazioni che un giornalismo in cerca di sensazioni qualifica subito come prodigiose.

E' nostra convinzione che la matematica non soltanto si presenti come uno strumento potentissimo e quasi indispensabile per la conoscenza della natura materiale, ma che possa essere anche uno strumento efficacissimo di formazione mentale e culturale, sopratutto dei giovani a cui si indirizza l'insegnamento della scuola media superiore. Ma riteniamo che queste possibilità formative dell'insegnamento della matematica possano essere utilizzate appieno se si riflette adeguatamente sulla sua natura e quindi si enucleano le possibilità educative del suo insegnamento.

Si legge spesso, e spesso si sente parlare, di "matematizzazione della realtà"; apprezziamo l'efficacia di questa espressione, nel presentare un aspetto dell'utilizzazione dello strumento matematico per la conoscenza del mondo fisico. Vorremo tuttavia anche

ricordare un altro aspetto sotto cui la matematica si può considerare: la sua funzione di chiave di lettura della realtà fisica. E con questa espressione intendiamo mettere in luce il fatto che la matematica può fornire gli strumenti linguistici (in senso lato) che permettono di rappresentare con chiarezza e precisione la realtà fisica, di formulare le leggi che la reggono, di dedurre con certezza le conseguenze dalle ipotesi che vengono formulate nel processo di costruzione di teorie coerenti e potenti.
Ci conforta nella nostra concezione il pensiero di Galileo, il quale enunciò, nel " Saggiatore", la sua convinzione che il gran libro dell'universo, che continuamente ci sta aperto dinanzi agli occhi, sia scritto in caratteri matematici. Da questa convinzione il grande pisano deduceva che chi non conosce questi caratteri non può leggere nel libro della natura, e si aggirerà nell'universo come in un oscuro labirinto.
Pensiamo che non si possa più efficacemente presentare un aspetto, molto importante, della matematica; l'aspetto secondo cui questa scienza - come abbiamo detto poco sopra - si presenta come un insieme di strumenti linguistici per rappresentare e per conoscere la natura del mondo fisico.
Se accettiamo questo modo di pensare, l'insegnamento della matematica acquista un significato ed una importanza che la pongono all'altezza dell'insegnamento della lingua materna. Riteniamo superfluo insistere sull'importanza di quest'ultimo; e ciò perchè i giovani possano inserirsi attivamente ed efficacemente nella società, e possano apprezzare i tesori di pensieri e di emozioni che ci sono stati trasmessi dalle opere della nostra letteratura nazionale ; ed anche perchè la possibilità e la capacità di espressione sono condizioni quasi necessarie perchè possa formarsi il pensiero autonomo. Quindi, se l'insegnamento della matematica è visto in questa luce, esso deve essere considerato come un momento fondamentale nella crescita del cittadino, affinchè esso sia capace di costruirsi un pensiero critico ed autonomo, e di esprimerlo in modo chiaro ed efficace.

E' facile convincersi della incontestabile superiorità posseduta del linguaggio matematico, rispetto al linguaggio comune, quando si tratti di rappresentare e di trasmettere alcuni aspetti della realtà materiale: basti a tale scopo confrontare la precisione e l'efficacia della rappresentazione quantitativa di certe grandezze e della corrispondente povera descrizione puramente qualitativa, che è la sola permessa dal linguaggio comune ; si consideri per esempio la differenza tra le espressioni verbali, che presentano gli elementi di un insieme con termini come "molti", oppure "pochi" (magari con i corrispondenti superlativi) e la presentazione precisa ed univoca data dal numero degli elementi, che rappresenta con insuperabile precisione ed efficacia l'insieme, dal punto di vista che interessa al momento.

Gli esempi potrebbero essere moltiplicati, ed essere resi meno banali; ma pensiamo che quello da noi presentato aiuti a chiarire il nostro pensiero su questo argomento.

D'altra parte chiunque può convincersi della grande utilità, e quasi della necessità che si insegni ai giovani un insieme di strumenti linguistici che formano alla chiarezza di idee, alla univocità e perspicuità della espressione: basta por mente alla marea, continuamente montante, di parole roboanti, di espressioni approssimative, di termini allusivi ed imprecisi, che ci assedia da ogni parte; basta por mente a tutti i vari gerghi (politichese, sindacalese, sinistrese, pedagogese,psicologese e chi più ne ha più ne metta), che sono quotidianamente utilizzati da tanti, troppi personaggi, i quali cercano di nascondere la povertà del pensiero dietro parole inconsuete e roboanti, e dietro ad un gergo pseudo tecnico; basta ascoltare per qualche minuto qualcuno tra questi tronfi personaggi, che pretendono di insegnare, ammonire, chiarire e, sopratutto, comandare e governare, per comprendere la utilità o addirittura la necessità di formare i futuri cittadini alla precisione ed alla sobrietà dell' espressione.

Si aggiunga a tutto questo il fatto che i moderni mezzi di comunicazione tendono sempre più a sostituire l'immagine al concetto, ed a soppiantare la rigorosa deduzione con il puro accostamento grafico delle figure. Queste pratiche conducono in modo quasi naturale a sostituire l'immaginazione all'intelligenza, e quindi a mortificare le capacità intellettuali e critiche del cittadino, ed a renderlo ~~renderlo~~ permeabile ai messaggi irrazionali, e prono alle suggestioni emotive.
E' chiaro che l'educazione all'impiego degli strumenti espressivi della matematica potrebbe essere un rimedio (anche se debole), alle conseguenze di queste azioni, che tendono ad affermare l'emotività e l'immaginazione sulla intelligenza e la ragione.

2 - Abbiamo visto che la matematica fornisce gli strumenti per la rappresentazione precisa della realtà fisica; e che l'educazione all'impiego di questi strumenti potrebbe servire a contrastare le costanti condizioni di irrazionalità e di emotività che caratterizzano la nostra vita associata di oggi, e che forse la invaderanno sempre di più nel futuro.
E' noto che la matematica costruisce dei simboli in larga misura artificiali e convenzionali per surrogare l'impiego dei termini del linguaggio comune, e per conseguire lo scopo della chiarezza e della univocità delle rappresentazioni; tuttavia l'impiego di simboli di questo tipo è soltanto il primo passo nella utilizzazione della mentalità matematica; e l'arrestarsi a questo passo potrebbe indurre ad illusioni ed essere forse gravemente fuorviante. Capita per esempio di leggere, in qualche autore, il termine "funzione" (largamente utilizzato in matematica) con un significato del tutto generico ed impreciso, ma con la pretesa di fare della matematica; oppure capita di vedere dei simboli strani, simili a quelli usati dalla matematica, inventati da certi autori con l'illusione di introdurre dei metodi matematici nelle loro

opere. Questi episodi, ed altri ancora che si potrebbero ricordare, ci spingono qui ad osservare che l'utilizzazione di espressioni simboliche e convenzionali, pur essendo diffusissima in matematica, non costituisce l'essenza del pensiero matematico; pare a noi che a questa creazione di simboli artificiali si debba aggiungere anche la formulazione di regole formali che ne precisano la sintassi; regole che codificano la deduzione (elemento fondamentale di ogni conoscenza razionale) riducendola, per certi aspetti, ad un calcolo.
Ci pare infatti di poter affermare che una delle ragioni del successo sempre crescente della matematizzazione delle scienze (in particolare della fisica) consista nella possibilità di rappresentare il mondo materiale con precisione, e di dedurre con ineccepibile coerenza formale. Infatti l'adozione del linguaggio matematico conduce a costruire delle teorie rigorose anzitutto perchè permette di formulare le ipotesi in linguaggio chiaro e preciso, ma sopratutto perchè permette di dedurre dalle ipotesi in modo perfettamente rigoroso, cosicchè le conseguenze, che vengono presentate alla verifica della realtà empirica, non diano adito ad alcuna critica che riguardi il rigore della deduzione.
In questo ordine di idee ci sentiamo di condividere il pensiero di G.Peano, il quale affermava che "la matematica è una logica perfezionata", e pensiamo di poter affermare che la utilizzazione della matematica nella conoscenza della natura realizza, almeno in parte, quell'ideale della conoscenza umana che già G.W. Leibnitz aveva vagheggiato, preconizzando che sarebbe venuto il tempo in cui due dotti non avrebbero avuto necessità di lunghe discussioni, perchè sarebbe bastato che si assidessero entrambi ad un tavolo, dicendosi l'uno all'altro "calculemus".
Si potrebbe dire che la fisica teorica moderna, e la tecnica più avanzata (che è strettamente collegata con quella), realizzano almeno in parte questa divinazione di Leibnitz, perchè utilizzano metodicamente il linguaggio matematico per la formulazione delle ipotesi, per la

rappresentazione della realtà materiale, e per la deduzione rigorosa; per queste dottrine quindi la matematica costituisce effettivamente la chiave con cui esse leggono la realtà, la interpretano e la dominano.
Ma, di fronte a queste constatazioni, si può anche osservare che questi progressi della scienza e della tecnica richiedono una <u>formazione</u> matematica, più che una conoscenza puramente operativa di questa scienza.Pertanto il suo insegnamento deve essere tenuto in modo tale che essa possa manifestare al massimo il suo carattere di disciplina formativa, e non di pura e semplice tecnica di calcolo o di deduzione.
Ciò che si è detto finora potrebbe essere ulteriormente confermato dalla constatazione che varie strutture formali, analoghe a quelle della matematica tradizionale, trovano oggi applicazione in domini teorici che si possono giudicare lontani da quelli abitualmente collegati con la matematica: pensiamo all'economia, alla teoria dell'informazione, alla logica. In questi domini, ed in altri ancora che non menzioniamo qui, si diffonde sempre di più la metodologia della matematica, che porta alla costruzione di simboli artificiali e convenzionali per designare i concetti, ed allo studio delle leggi sintattiche dei simboli stessi; leggi che possono essere diverse da una teoria all'altra, ma che in ogni caso permettono la deduzione rigorosa, che si ottiene mediante l'applicazione delle regole sintattiche, e quindi si riduce, come voleva Leibnitz, ad un calcolo, che si può affidare ad uno strumento materiale, come un elaboratore elettronico.

3 - Le considerazioni svolte poco sopra aiutano a comprendere quale sia l'importanza dell'algebra in tutto il dominio della matematica moderna: infatti, alla luce delle idee che abbiamo cercato di presentare, l'algebra si può guardare come lo studio delle leggi, generali ed astratte, che reggono i sistemi dei simboli e delle regole che ne

permettono l'applicazione ai vari domini di conoscenza. Per esempio oggi si considerano come dominio dell'algebra astratta le regole che reggono la cosiddetta "Algebra di Boole", che possono servire per sviluppare la logica simbolica, oppure la teoria dei circuiti. E ciò potrebbe essere considerato una prova del fatto che la matematica moderna diventa sempre più astratta e formalizzata.
Questo fatto mette in evidenza un altro aspetto formativo dell'insegnamento della matematica, aspetto che forse spesso viene dimenticato, oppure costituisce uno stimolo al rifiuto del metodo matematico, presso i soggetti che hanno particolari difficoltà psicologiche. Infatti abbiamo visto che la matematica può costruire vari linguaggi, e cioè vari sistemi di simboli artificiali; ed effettivamente ne ha costruiti e ne costruisce ancora, e ne studia le leggi; questi sistemi possono essere diversi tra loro, ma hanno tutti un carattere comune, e cioè quello di essere quasi sempre privi di ridondanza e quindi molto rigorosi.
Per spiegare meglio ciò che intendiamo dire osserviamo che in ogni linguaggio naturale esiste una certa ridondanza; questa permette di comunicare i messaggi anche senza rispettare tutte le leggi della grammatica. Ma nella matematica ciò non è mai possibile: infatti, se in un insieme di simboli anche una sola regola formale non è rispettata, se anche un solo simbolo non è quello che dovrebbe, l' espressione può non avere senso, secondo le convenzioni che regolano il linguaggio, oppure può comunicare un messaggio del tutto diverso da quello voluto.
Come abbiamo detto, questo carattere di rigidità della sintassi matematica può anche mettere a disagio alcune menti che male si adattano a queste situazioni; ma d'altra parte questa rigidità può anche essere vista come una qualità di grande valore formativo; e ciò con riferimento alla tendenza al vaniloquio ed alla comunicazione spesso priva di senso (razionalmente inteso) e di regole, purtroppo diffuse nella società attuale.
Questi caratteri del linguaggio matematico rendono spesso necessario un severo esercizio di addestramento al suo uso.

Esercizio che tuttavia, in sede didattica, non deve essere mai considerato come fine a se stesso, per non perdere di vista il significato anche formativo dell'insegnamento all'impiego dei sistemi formali.
Si potrebbe tuttavia osservare che l'insegnamento della matematica, in ogni momento dello sviluppo mentale dei discenti, non può fare a meno di imporre un certo grado di fatica e di noia, dovute alla necessaria memorizzazione delle regole formali ed all'addestramento al loro impiego: così pensiamo che nelle scuole dell'ordine elementare non si possa fare a meno di far memorizzare i risultati di certe operazioni aritmetiche elementari (le cosiddette tabelline della moltiplicazione), e di addestrare al rispetto delle regole fondamentali dell'aritmetica; quando, al crescere dell'età del discente, dall'aritmetica si passa al calcolo letterale ed all'algebra non si può evitare di richiedere la memorizzazione dei risultati di certi calcoli elementari, e l'addestramento al rispetto delle convenzioni di scrittura. Infatti se la matematica deve avere anche l'aspetto di un linguaggio, anzi il linguaggio fondamentale di tante scienze importanti, non si può dimenticare che l'apprendimento di una lingua richiede esercizio, e si perfeziona con l'acquisizione di certi automatismi che permettono la comprensione e la comunicazione spedita e facile.
Sarà compito del docente accorto ed avveduto quello di motivare questi sforzi puramente mnemonici e questi esercizi spesso penosi e noiosi, additando i vantaggi della conoscenza e del dominio di un linguaggio potente e preciso.

4 - Pensiamo che una attenzione particolare debba essere rivolta verso l'insegnamento della geometria, nel senso tradizionale ed abituale del termine. Ci pare infatti che, nei programmi ministeriali, a questa dottrina non sia stato riconosciuto il posto fondamentale che essa possiede, ai fini della formazione dei giovani all'astrazione, alla

deduzione rigorosa ed anche alla ricerca di soluzioni di situazioni problematiche.
A nostro parere la geometria presenta anche un aspetto che è profondamente formativo: essa infatti può essere vista come uno dei momenti iniziali in cui il discente costruisce una visione razionale dei propri rapporti spaziali con gli oggetti che lo circondano. Per questa costruzione è necessario esercitare le facoltà di astrazione e la fantasia, ed è necessario compiere delle operazioni logiche di grande importanza formativa: la definizione, e la deduzione rigorosa; inoltre in geometria si praticano metodicamente quelle procedure logiche di analisi e di sintesi che già la filosofia e la matematica greca avevano identificate come costitutive della conoscenza razionale. Ci pare sintomatico il fatto che l'insieme delle convenzioni e dei metodi cartesiani sia oggi abitualmente denominato "Geometria analitica": cioè una geometria nella quale il procedimento fondamentale di analisi (cioè di deduzione) si compie utilizzando le regole dell'algebra, cioè realizzando la deduzione con l'applicazione delle regole sintattiche del linguaggio adottato per rappresentare gli enti della geometria.
A noi appare chiaro che la trattazione della geometria con le procedure tradizionali permetta di allenare i giovani al ragionamento logico rigoroso, di educarli alla ricerca dei fondamenti e delle motivazioni delle proposizioni, ad accettare la validità di queste soltanto dopo aver valutato scrupolosamente la validità di tutti i passaggi logici che le giustificano, applicando metodicamente i due procedimenti di analisi e di sintesi di cui abbiamo detto; questa pratica conferisce ai giovani una formazione al rigore del pensiero che sarà loro utile, per non dire necessaria, in tutto il resto della loro vita, ed in particolare in ogni altro campo di conoscenza razionale e scientifica.
Inoltre la ricerca delle motivazioni lontane del ragionamento geometrico potrà permettere all'insegnante colto e consapevole di introdurre e giustificare la

esposizione dei sistemi assiomatici, o almeno di preparare alla loro conoscenza.
Un altro argomento che a noi sembra importante a favore dell'insegnamento della geometria in modo tradizionale è dato dal fatto che in questo caso non è necessaria la conoscenza del formalismo algebrico, come avviene invece nella utilizzazione della geometria analitica; occorre soltanto esercitare le facoltà di astrazione e di deduzione, e l'assenza di queste capacità non può essere mascherata (come avviene talvolta,) dalla pura abilità di manovra del calcolo algebrico.
Pare a noi che soltanto pochi tra i contenuti dei teoremi classici abbiano grande importanza per le applicazioni; pertanto, se si mirasse soltanto alle applicazioni, basterebbe far memorizzare agli alunni il contenuto di uno scarno formulario; ma l'insegnamento deve invece mirare alla formazione del senso critico e logico, e per questo scopo pensiamo che l'insegnamento della geometria nella forma tradizionale non possa essere dimenticato e neppure trascurato.
Secondo noi, su questa distinzione, tra formazione e pura informazione dei contenuti, si fonda anche la distinzione e la qualificazione dell'opera dell'insegnante: questi cioè deve scegliere se vuole essere educatore e formatore oppure soltanto un insaccatore di nozioni.
Riteniamo che sia valido il parere di chi vede nella geometria il "primo capitolo della fisica", cioè , come è già stato detto, uno dei primi momenti nei quali un soggetto organizza in modo razionale e sistematico le proprie conoscenze spaziali ed i propri rapporti con gli oggetti che lo circondano. E questo modo di pensare vede quindi nella geometria uno degli strumenti più importanti della formazione scientifica degli alunni.

PARTE II . CONSIDERAZIONI DI DIDATTICA.

1 - Nella prima parte abbiamo cercato di delineare una immagine della matematica che metta in evidenza i valori profondamente formativi di questa materia per i giovani discenti. Abbiamo insistito infatti sulla idea che la matematica ha dei valori squisitamente culturali, se viene guardata nella giusta luce: anzitutto come chiave di lettura della realtà materiale, ed in secondo luogo come campo insostituibile di educazione alla chiarezza, alla sobrietà e precisione di espressione, alla deduzione rigorosa.

Ci occuperemo ora delle conseguenze che questa visione della matematica può avere sull'opera didattica degli insegnanti; ed in particolare prenderemo in considerazione i contenuti dei nuovi programmi di matematica del biennio delle scuole medie superiori, e cercheremo di riflettere sulle possibilità che questi contenuti offrono all'insegnante per dare della matematica la giusta immagine che abbiamo cercato di delineare, e per utilizzare al massimo, nel vantaggio dei discenti, i valori formativi che l'insegnamento della matematica può manifestare e valorizzare.

A questo scopo cercheremo di analizzare brevemente quali siano le situazioni che gli insegnanti si trovano a fronteggiare, all'inizio del biennio, e quali possano essere gli itinerari didattici che l'insegnante può seguire, in presenza di queste situazioni, per conferire all'insegnamento della matematica tutto il valore che esso può avere.

E' appena necessario ricordare che la diagnosi della situazione iniziale, che faremo nelle prossime pagine, non intende costituire in alcun modo una critica della scuola media inferiore e dei suoi programmi; infatti non è questo il luogo per una operazione di questo tipo, che non entra negli scopi del presente lavoro; tuttavia riteniamo che sia necessario prendere coscienza esplicitamente delle condizioni iniziali, nelle quali si trova il giovane (ed ovviamente anche l'insegnante) all'inizio del corso di studi della scuola media superiore.

2 - Allo scopo che ci interessa si potrebbe anzitutto osservare che in generale ben pochi ragazzi escono dalla scuola media inferiore con la formazione ad un lavoro sistematico, soprattutto per quanto riguarda la matematica: infatti quasi sempre essi credono di doversi cimentare con un risultato da conseguire, sia esso un numero che dà la risposta ad un problema, la valutazione di una espressione, oppure la dimostrazione di una proposizione; per convincersi della verità di questa affermazione basta osservare come essi si trovano disorientati quando non esista un risultato con il quale essi possano confrontare ciò che hanno trovato o dimostrato.
Occorre quindi, fin dall'inizio dell'opera didattica, una paziente educazione al metodo; educazione che chiarisca loro lo scopo vero dell'attività matematica, la quale spesso incomincia dove essi credono di aver finito; cioè incomincia con la revisione critica di ciò che si è fatto. Quest'opera di educazione implica un serrato controllo di ciò che viene fatto a scuola come di ciò che viene eseguito a casa, affinchè ciascuno impari il gusto della costruzione personale del proprio sapere, impresa che evidentemente nessuno può compiere al suo posto.
Riteniamo che uno degli aspetti più importanti di questa fase del lavoro didattico sia l'analisi e la correzione degli errori. E' necessario infatti che il giovane accetti di imparare attraverso l'errore, e che non pretenda di giungere a non sbagliare mai; impresa questa che si è rivelata quasi impossibile anche ai più grandi scienziati, e che forse è anche impossibile per la scienza stessa come tale.
La correzione degli errori si rivela molto utile anche per l'insegnante,il quale può rendersi così conto del fatto che spesso le difficoltà nei riguardi della matematica siano di

tipo simbolico e linguistico, prima che di tipo concettuale: per esempio l'impiego di simboli e di parole uguali per significati diversi. A questo proposito gli argomenti di insegnamento offrono numerosi esempi: si pensi all'impiego del termine "somma" che viene usato in diversi contesti: per le grandezze, per i numeri naturali, per i numeri relativi; si pensi alla necessaria riflessione sul significato e sull'impiego delle convenzioni abituali (che ci vengono dagli Indiani per il tramite della civiltà araba) per la rappresentazione dei numeri naturali. Si pensi ai successivi passaggi, che conducono i discenti a livelli di astrazione sempre più alti, fino a giungere allo studio astratto delle leggi con cui si opera sui simboli.
Questo cammino che il discente deve compiere, ovviamente sotto la guida dell'insegnante, richiede dal giovane uno sforzo che generalmente viene compiuto in un'età in cui incomincia a nascere ed a formarsi la capacità di pensiero cosiddetto formale; cioè in un'età in cui le capacità intellettive della persona si modificano profondamente , e passano da una fase che è principalmente operativa (riguardante le operazioni eseguite o eseguibili fisicamente sul mondo materiale) ad una fase di pensiero astratto, razionale , capace di attività di deduzione, induzione, astrazione, sintesi, generalizzazione.
La formazione di queste capacità di pensiero astratto costituisce uno degli scopi principali dell'insegnamento della matematica (ma ovviamente non soltanto di questo) nel primo biennio delle scuole medie superiori.
Ciò si potrebbe esprimere con altre parole dicendo che, in questo periodo dello sviluppo mentale e fisico del giovane, occorre aiutarlo a passare da una fase puramente operativa e manipolativa del suo rapporto con la realtà esteriore ad una fase di attività più propriamente razionale.
A questo scopo pensiamo che il primo momento dell'attività educativa possa consistere nella educazione alla osservazione; diciamo questo ben convinti dell'aspetto potenzialmente paradossale che essa può avere per chi considera la matematica come una scienza di concetti

astratti; ma pensiamo che, anche in matematica, occorra saper vedere , cioè mettere in atto quell'atteggiamento della persona, quella facoltà dell'intelligenza e del cuore che è l'attenzione. Anche se questa facoltà, nel campo della matematica, si esplica in modo diverso da quanto avviene per esempio nel campo dell'arte, oppure anche delle scienze della materia vivente e non vivente.
Nell'ambito della matematica infatti, osservare significa porsi di fronte ai contenuti, siano essi teoremi, esercizi, oppure enunciati di problemi, cercando di coglierne il significato , e le eventuali implicazioni.
La cosa si presenta, a prima vista, come una esigenza del tutto naturale ed immediata: chiunque infatti pensa che per dimostrare un teorema è anzitutto necessario comprendere appieno il significato delle ipotesi, e che per risolvere un problema è anzitutto necessario comprendere bene l'enunciato, e identificare i dati e chiarire quali debbano essere le risposte. Ma chiunque abbia qualche esperienza di insegnamento sa che questo atteggiamento non è mai troppo facile da insegnare ai giovani.
Si potrebbe aprire qui un ordine di considerazioni che attengono all'aspetto di linguaggio, che la matematica possiede, e del quale abbiamo detto nella prima parte. Riteniamo che sia necessario in questo campo uno sforzo educativo preciso, sforzo il cui scopo non è soltanto l'uso corretto di un simbolismo rigoroso, o l'abitudine ad una ricerca di perfezione che confina con la pignoleria, ma è sopratutto la formazione di un'attitudine alla comunicazione chiara e precisa; attitudine che, nel mondo di oggi, è altrettanto importante della conoscenza di una lingua straniera (supponendo ovviamente che la lingua materna sia perfettamente conosciuta; ipotesi troppo spesso invalida).
Crediamo infatti che l'abitudine all'impiego di un linguaggio preciso, univoco, rigido eppure estremamente potente come quello matematico renda più capaci di esprimersi anche con il linguaggio comune. Inoltre le regole della deduzione matematica non sono diverse da

quelle impiegate dalla logica ordinaria, basata sul senso comune; di conseguenza l'educazione al ragionamento corretto ha necessariamente una influenza positiva su ogni attività razionale dell'uomo, e l'attività matematica costituisce anche una educazione linguistica molto precisa, e che ha perciò una ricaduta positiva anche sulla comprensione e sull'assimilazione delle altre materie di insegnamento.

E' facile infatti convincersi che una delle più gravi carenze e delle maggiori difficoltà che i giovani incontrano all'età che stiamo considerando è costituita dal fatto di non possedere o non saper maneggiare degli strumenti espressivi adeguati ai contenuti di sapere e di pensiero già conosciuti o da conoscere. Inoltre molto spesso il giovane non si rende conto della effettiva gravità di una carenza di questo tipo, perchè non si rende conto fino in fondo che si conosce bene soltanto ciò che si sa comunicare.

3 - Le considerazioni che abbiamo svolto finora permettono di tracciare un programma di insegnamento della matematica che miri come si è detto ripetutamente, alla formazione del giovane e non soltanto alla esposizione di certi contenuti all'addestramento all'impiego di certe tecniche formali. Esponiamo qui quelli che riteniamo gli obiettivi fondamentali di un insegnamento educativo, riservandoci di analizzare nel seguito come i singoli punti del programma possono essere trattati a questo scopo

A nostro modo di vedere, gli obiettivi fondamentali dell'insegnamento della matematica nel primo biennio della scuola media superiore possono essere identificati nel modo seguente.

a) guidare alla formazione di un pensiero formale astratto; il che significa aiutare lo sviluppo delle capacità di astrazione di simbolizzazione, di deduzione che il giovane possiede. In altre parole, l'attività matematica dovrebbe mirare alla rappresentazione razionale di alcuni aspetti della realtà, e non limitarsi alla applicazione di certe regole, o alla realizzazione di certe procedure, supinamente applicate.

b) sviluppare le capacità di critica, con l'avviamento alla assiomatizzazione. E' infatti facile osservare che il giovane spesso giudica inutile il chiarire i fondamenti di una data costruzione teorica, quando essi gli appaiono come evidenti. Anzi talvolta egli giunge a considerare paradossale il comportamento di chi pretende l'enunciazione esplicita di certi punti di partenza, che a lui appaiono come naturali e scontati. Occorrerebbe invece formare l'abitudine a non considerare l'immagine come fondamento di deduzione, ed a non fidarsi delle pretese evidenze come fondamenti di verità.

c) educare alla deduzione rigorosa, quale si incontra per esempio nella geometria tradizionalmente presentata, e quindi limitare l'impiego dei calcoli o degli strumenti della geometria analitica, per evitare che il giovane confonda la verifica puramente algebrica con la dimostrazione razionale.

d) far comprendere ed apprendere l'aspetto linguistico della matematica, e ciò anche in relazione con gli altri campi di sapere e le altre scienze.

e) consolidare l'addestramento all'impiego facile e sicuro del simbolismo algebrico, senza tuttavia fare di questo necessario esercizio l'argomento fondamentale dell'insegnamento e soprattutto senza ricondurre alla verifica delle capacità operative il giudizio sulla formazione mentale degli alunni.

f) non mortificare con un eccessivo formalismo le capacità intuitive e creative degli alunni, le curiosità e le aperture, che conducono i giovani a voler conoscere i "perchè" ed a domandarsi da dove viene una certa idea, una certa impostazione, una certa costruzione teorica.

A questo proposito pensiamo che non si debba trascurare di presentare anche l'origine storica di certe teorie, e ciò per educare i giovani a quella comprensione del pensiero altrui, a quella accettazione della evoluzione storica della scienza che è fondamento di maturazione umana, oltre che scientifica.

4 - Alla luce delle considerazioni generali che abbiamo svolto poco fa, presenteremo qui di seguito una proposta di quella che si potrebbe chiamare una lettura trasversale dei nuovi programmi, i quali, per parte loro, sono di tipo indicativo e non prescrittivo. Infatti in essi l'articolazione dei temi lascia libero l'insegnante di stabilire quando, quanto e come affrontare i vari argomenti in programma. Ciò tuttavia non vale per la logica, a proposito della quale si dice espressamente che non si tratta di un capitolo da svolgere sistematicamente oppure, peggio, di una trattazione da premettere a tutti i capitoli, ma di un metodo di indagine e di riflessione su tutto ciò che si fa.

E' chiaro d'altra parte che il programma ministeriale proposto non può essere svolto con una scansione diacronica che rispecchi la presentazione degli argomenti contenuti nel programma stesso, ma richiede uno sviluppo che tenga conto delle possibilità degli allievi, e sopratutto con collegamenti metodologici per così dire trasversali tra i vari argomenti che si svolgono.

Pertanto pensiamo che i vari argomenti debbano essere svolti, per così dire, in parallelo, ovviamente evitando le confusioni, ma anche evitando le rigide divisioni a compartimenti stagni.

Nella prima classe del biennio pensiamo che si possa iniziare il lavoro con un azzeramento delle nozioni possedute dai discenti. Tale azzeramento potrebbe consistere in una rivisitazione degli insiemi numerici già conosciuti (insieme dei naturali, degli interi e dei razionali), in modo da avere una base sicura per gli sviluppi ulteriori.

In questa rivisitazione si potrebbero richiamare oppure anche introdurre ex novo, quando ve ne sia bisogno, in particolare le questioni relative alle relazioni d'ordine, alla densità dei numeri razionali, alla intuizione del concetto di infinito a cui dà luogo la considerazione dell'insieme dei numeri naturali, le regole dei segni per le operazioni sui relativi, le proprietà delle potenze, la legge di annullamento del prodotto.

Abbiamo ricordato questi argomenti a titolo di esempio di un itinerario che mira a mettere sotto gli occhi dei discenti alcune fra le strutture fondamentali per la matematica (gruppi, campi ecc.) e sopratutto mira a far conquistare il dominio delle procedure deduttive e degli strumenti linguistici.

Pensiamo che a questo punto si possano anche trattare le operazioni sugli insiemi: unione, intersezione, complementazione, differenza, prodotto cartesiano. Ovviamente tali operazioni , a questo livello, possono essere introdotte con richiamo alla intuizione, e non con procedimento astratto, rigoroso ed assiomatico; ma esse forniranno l'occasione per l'analisi delle proprietà formali delle operazioni, per sottolineare le analogie e le differenze con le operazioni sui numeri, per dare esempi di un simbolismo semplice ma diverso da quello tradizionale che riguarda le operazioni aritmetiche.

L'introduzione dei primi connettivi logici ("e", "vel", "non") fornirà una ulteriore occasione per riflettere sulla simbolizzazione di concetti diversi da quelli numerici, e per richiamare ancora una volta l'aspetto della matematica come linguaggio rigoroso ed astratto.

Questo lavoro preliminare, che può occupare l'intero primo trimestre dell'anno scolastico, permetterà di richiamare in seguito senza grandi difficoltà il calcolo letterale; infatti, in questo itinerario didattico, tale calcolo si presenta come una delle tante possibili trascrizioni simboliche di operazioni già note.

In seguito a questa prima fase, si potrebbe iniziare la trattazione della geometria razionale, con l'ampiezza che l'insegnante giudicherà opportuna.

Questo insegnamento dovrebbe mirare ad offrire l'occasione per far esercitare gli allievi nella deduzione razionale, al fine di rendere chiare le procedure di scoperta e di conferma della verità: procedure di analisi e di sintesi, condizioni necessarie, sufficienti, necessarie e sufficienti, teoremi diretti ed inversi, dimostrazioni indirette e per assurdo.

Può rivelarsi molto utile ed opportuno affiancare alle trattazioni teoriche una attività di risoluzione di problemi vari, che non siano banali, ma che non si riducano agli esercizi legati strettamente ai capitoli trattati teoricamente; questi ultimi esercizi, beninteso, sono di grande utilità, se non addirittura necessari perchè i discenti si impadroniscano delle teorie; ma riteniamo che la loro inventiva ed il loro interesse possano essere risvegliati anche (se non soprattutto) da esercizi e problemi non abituali: in questo modo pensiamo che si possa cogliere l'occasione per introdurre anche i concetti relativi al calcolo delle probabilità.

I contenuti di cui abbiamo detto finora potrebbero esaurire l'attività del primo anno del biennio. Al secondo anno del biennio stesso pensiamo possano essere trattati gli argomenti seguenti: anzitutto l'introduzione dei numeri reali; osserviamo che questa teoria, per essere trattata in modo rigoroso e soddisfacente, richiede di affrontare il concetto di algoritmo infinito, quale che sia la strada che si sceglie per introdurre questi concetti (successioni, in particolare successioni di numeri decimali, sezioni nel campo razionale o altre). A questo punto si potrebbe anche accennare alla formulazione rigorosa del concetto di continuità geometrica: si potrebbe dire infatti che la precisazione di questi due concetti è fondamentale per la matematica nel senso moderno del termine. Inoltre l'accenno alla continuità ed alla sua formulazione logicamente rigorosa può servire per ribadire la validità dell'osservazione che l'immagine non è argomento valido per la deduzione rigorosa, e che la fantasia non è uno strumento della ragione.

In secondo luogo si potrebbe introdurre il concetto di equiscomponibilità, sul quale si costruisce la relazione di equivalenza di figure poligonali piane. Come è noto, si tratta in questo caso di un relazione che è più generale di quella di congruenza tra figure; relazione che fonda poi il concetto di area di una figura piana, e le regole per il suo calcolo. Si potranno così avviare gradatamente gli allievi ad ampliare, con esempi concreti, il proprio concetto di relazione, ed a comprendere che la costruzione di una teoria scientifica, che consenta la conoscenza razionale, è fondata anche sul punto di vista dal quale ci si pone, nel considerare gli oggetti che si vogliono conoscere. Si getteranno così le basi per la introduzione della visione kleiniana della geometria, visione sulla quale si fonda la "geometria delle trasformazioni".

A questo livello della crescita intellettuale degli alunni si potrà riflettere sui concetti di funzione e di relazione, fondamentali per l'analisi matematica, e si potranno presentare le convenzioni della geometria analitica. Si potrà far vedere che queste costituiscono un esempio di utilizzazione della matematica come chiave di lettura della realtà; in questo caso dei contenuti della geometria elementare. Questi vengono opportunamente rappresentati con strumenti dell'algebra, e le loro proprietà vengono tradotte con gli strumenti di questa dottrina; di modo che le leggi sintattiche dell'algebra, opportunamente applicate, permettono di scoprire nuove relazioni tra oggetti della geometria e di risolvere i problemi geometrici. Non si mancherà di far notare che questi procedimenti realizzano, con strumenti moderni, la procedura di analisi che era già stata codificata dai geometri greci; e non si dimenticherà di sottolineare il fatto che la discussione dei risultati algebrici realizza la corrispondente procedura di sintesi. Entrambe le procedure sono strettamente necessarie per trovare i risultati e per comprenderne il significato, il che permetterà di sottolineare i parallelismi (quando esistano) tra il linguaggio tradizionale e le leggi sintattiche dell'algebra, ed i limiti di ciascun linguaggio.

Anche in questo caso si potrà accennare (se risulta possibile) al significato della ricerca di invarianti delle figure, di fronte ai cambiamenti di sistemi di riferimento, aprendo cosi' ancora una volta la strada alla visione kleiniana della geometria.

5 - Vorremmo chiudere questi cenni sommari parlando brevemente della soluzione dei problemi e dell'impiego degli strumenti elettronici nella scuola.
E' chiaro che, se lo scopo dell'insegnamento è soltanto la soluzione dei problemi, l'opera della scuola sarà in breve tempo vanificata dalla esistenza dei cosiddetti "sistemi esperti"; ed anche oggi esistono programmi già fatti che presentano numerose gamme di soluzioni di problemi di geometria, con i metodi della geometria analitica. Ma a noi pare chiaro che il compito principale della scuola non sia quello di addestrare alla soluzione dei problemi, ed all'uso degli eventuali strumenti già esistenti per questi scopi. Tuttavia si può sostenere che la soluzione dei problemi abbia un suo ruolo insostituibile nella formazione dell'uomo razionale, e quindi nell'insegnamento della matematica, che in questa formazione ha una parte tanto importante. E' quindi necessario che ogni problema sia presentato non soltanto in vista dell'ottenimento di una risposta, ma come una occasione di analisi attenta degli enunciati e dei dati, di applicazione di procedure (quando esistano) oppure di invenzione di procedure nuove, di critica dei risultati, di tentativi di generalizzazione.
Come abbiamo già osservato, l'operazione di verifica dei risultati e di critica delle procedure, di controllo delle operazioni e di correzione degli errori non è mai molto gradita agli alunni; questi tenderebbero sempre, come massimo sforzo, a controllare se la risposta che essi hanno eventualmente fornita coincide con quella che abitualmente si trova sui libri di testo, dopo l'enunciazione di ogni problema . L'abitudine alla critica di se stessi, di controllo accurato delle informazioni che si forniscono, di

verifica della veridicità dei propri enunciati è un'opera che - a nostro parere - può essere svolta soltanto da un insegnante che mira alla formazione dei giovani, e non soltanto ad insegnare loro la manovra di certi strumenti, riducendo quindi l'insegnamento a puro addestramento.
In questo ordine di idee pensiamo che la costruzione di programmi di calcolatore possa essere una delle tante palestre di esercizio di analisi logica e di strutturazione razionale dei comportamenti; inoltre l'impiego degli strumenti elettronici di elaborazione dei dati e di calcolo numerico permetterà di risparmiare molta fatica materiale di calcolo, e di indirizzare gli sforzi intellettuali nei campi in cui essi sono veramente indispensabili. Occorre tuttavia che l'insegnante operi attivamente perchè lo strumento non diventi un feticcio, e le sue risposte siano ritenute come il paradigma della verità; a questo proposito proprio l'impiego degli strumenti rapidi di calcolo può aiutare nella valutazione precisa del significato delle risposte date dalle macchine, risposte che spesso vengono ritenute come oracoli inappellabili; come avviene per esempio, quando nei problemi pratici i calcolatori forniscono per i risultati un numero di cifre che è nettamente superiore all'ordine di approssimazione dei dati, che discendono da misure o da osservazioni. In tal modo molte tra le numerose cifre fornite dai mezzi di calcolo non hanno alcun significato concreto, ma spesso esse vengono conservate nei calcoli successivi, come se il calcolatore fosse un oracolo creatore di verità prima sconosciute.

6 - Il programma della ricerca che si intende svolgere si articola sulla base delle idee fondamentali che sono state esposte sopra nel N. 4, cercando di identificare degli itinerari didattici che avviino alla costruzione autonoma, da parte degli alunni, della mentalità scientifica in generale, ed in particolare della mentalità matematica, in

quanto essa ha di profondamente formativo, come è stato esposto nella prima parte di questo scritto.
Il raggiungimento di questo scopo potrebbe essere cercato operando una cernita oculata tra gli argomenti proposti dai programmi, ed anche analizzando la manualistica didattica corrente oggi in Italia, da giudicarsi alla luce delle riflessioni già ripetutamente esposte.
In particolare, per quanto riguarda il primo anno del biennio della scuola media superiore, si intende:
a) analizzare le migliori modalità possibili per eseguire quell'azzeramento di cui si è detto, con la rivisitazione delle conoscenze che gli alunni già posseggono o dovrebbero possedere; ciò al fine di accertare la esistenza, da parte dell'alunno, di una capacità di manovra certa e spedita delle regole di calcolo numerico e di calcolo letterale ma anche, e sopratutto, per poter introdurre la presentazione delle strutture algebriche fondamentali, con il relativo vocabolario tecnico.
Sempre a questo scopo, si potrebbe analizzare la opportunità e la possibilità di introdurre il simbolismo della teoria degli insiemi, con gli scopi di presentare delle operazioni astratte che seguono delle leggi formali diverse da quelle abituali dell'algebra elementare, e di aprire, dove ciò sia possibile, la strada alla utilizzazione di tali strutture formali nella logica.
b) analizzare le modalità e le migliori strategie didattiche perl'avviamento alla geometria razionale, che è sempre stata, e rimane, una palestra insuperabile di ragionamento rigoroso; analizzare anche le possibilità di utilizzare per questo scopo le eventuali formalizzazioni di concetti e di procedure logiche, secondo quanto è stato detto sopra sub a).
c) analizzare le possibilità di istituire, con le dovute precauzioni, anche un tentativo di insegnamento per problemi; questa eventuale introduzione dovrebbe essere attentamente vagliata e valutata, per evitare il lavoro dispersivo e non sistematico, ma potrebbe rappresentare

anche lo spunto per stimolare le capacità inventive e critiche degli alunni.

Per quanto riguarda il secondo anno si intende:

d) analizzare le modalità per l'introduzione dei numeri reali, e in generale (sempre con le dovute precauzioni) almeno la problematica elementare degli algoritmi infiniti;

e) studiare la presentazione dei metodi della geometria analitica, in modo che essa non diventi una raccolta di ricette facili per la soluzione di problemi geometrici, ma si riveli un momento fondamentale per l'analisi della conoscenza matematica di certi contenuti.

f) studiare infine anche l'opportunità per la preparazione all'impiego intelligente dei mezzi di calcolo programmabili , con la relativi valutazione critica delle possibilità offerte da questi strumenti e dei risultati ottenibili con essi.

7 - A titolo di conclusione, vorremmo ricordare ciò che un antico saggio aveva risposto ad un potente del suo tempo, affermando che non esistono vie regie per la geometria: le stesse cose si potrebbero ripetere oggi, dicendo che ovviamente non esistono ricette per rendere facile l'apprendimento della matematica; questo deve essere uno sforzo personale di comprensione e di appropriazione di concetti e di metodi. E' possibile tuttavia aiutare i giovani in questo sforzo insostituibile additando loro il significato e la portata di questi strumenti intellettuali, che sono tra i più potenti che l'uomo abbia saputo costruire nei secoli per cercare la verità, o almeno una parte di essa.